Был задан вопрос:

Что такое число e?

ОТВЕЧАЮ:

Это предел числовой последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

То есть

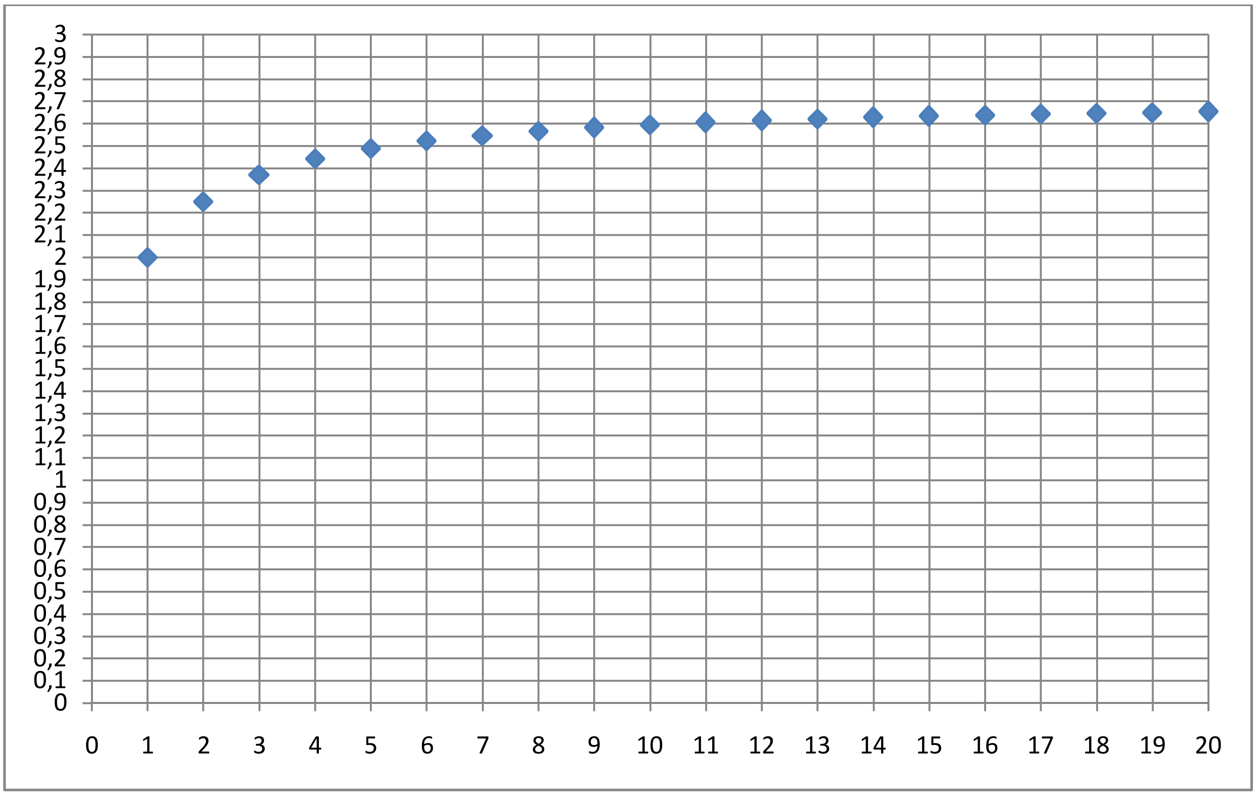
$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Встречный вопрос:

А почему этот предел существует и конечен? Ведь пределы могут не существовать или быть бесконечными?

ОТВЕЧАЮ:

Доказательство этого факта достаточно сложно и в наш курс не входит. Начнём с того, что оно опирается на одну из теорем, которой тоже нет в нашем курсе: «Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то она имеет конечный предел». Чтобы было яснее, взгляните на график этой последовательности:



Видно, что точки поднимаются всё выше и выше, стремясь к некоторой высоте на уровне предела (равного *e*). При этом существует число 3 (можно было взять и ещё больший ограничитель, например число 4), которое ограничивает сверху последовательность x_n. Возможно, процитированная теорема Вам кажется очевидной, и Вы не потребуете её доказательства. Тогда нужно доказать два утверждения: что последовательность x_n возрастает и что существует число, которое ограничивает x_n сверху (не подумайте, что это число обязательно должно быть пределом).

1) **Докажем, что последовательность x_n возрастает.**

Возрастающая последовательность это та, у которой каждый следующий член больше предыдущего, то есть выполняется неравенство

$$x_n < x_{n+1}$$

Вспомним, что

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

И разложим эту степень суммы по формуле бинома Ньютона.

Напомним, что биномом Ньютона называется формула:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

Или в развёрнутом виде

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Для того, чтобы понять, как использовать формулу бинома Ньютона необходимо знать, как вычислять так называемое число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Здесь восклицательный знак обозначает ФАКТОРИАЛ. То есть произведение всех чисел от 1 до того числа, от которого этот факториал считается. Попутно заметим, что 0!=1.

$$C_n^k = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)\cdot (n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{k!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-k)}$$

Сократим дробь

$$C_n^k = \frac{(n-k+1)\cdot \ldots \cdot (n-2)\cdot (n-1)\cdot n}{k!}$$

Заметив, что в числителе осталось *k* сомножителей.

Итак, раскроем x_n по формуле бинома Ньютона:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

Напомним, что в числителе числа сочетаний осталось *k* сомножителей, то есть столько же сколько сомножителей *n* будет в знаменателе после умножения числа сочетаний на $(1/n)^k$.

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{k!\cdot n^{k}}=$$

Разделим каждый из сомножителей числителя на *n*

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}=$$

Последняя дробь равна 1, а в остальных дробях поделим числитель на знаменатель почленно

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Теперь проанализируем, что получится, если взять следующий член последовательности x_{n+1}, подставив в полученную сумму вместо n число $(n+1)$. По сравнению с x_n после замены знаменателей n на число $(n+1)$ все маленькие дроби увеличат свои знаменатели, и следовательно, сами уменьшатся. Поэтому в каждой разности в скобках уменьшатся вычитаемые, что приведёт к увеличению каждой из скобок. То есть возрастёт каждый сомножитель в произведении. Следовательно, увеличится произведение, являющееся каким-то из слагаемых суммы бинома Ньютона. Очевидно, что всё это приведёт к увеличению всей суммы. Заметим ещё, что при увеличении степени n в биноме Ньютона увеличится и число слагаемых. А поскольку здесь все слагаемые только положительные, то это тоже приведёт к дополнительному увеличению x_{n+1} по сравнению с x_n.

2) **Докажем, что последовательность x_n ограничена сверху.**

Отбросим в последней формуле вычитаемые во всех разностях. От этого выражение может только увеличится:

$$x_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (1) \cdot \ldots \cdot (1) \cdot (1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

Запишем полученную сумму в развёрнутом виде

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} <$$

Если вместо каждого из чисел в знаменателях дробей поставить число 2, то есть уменьшить его, то каждая из дробей вырастет, после чего увеличится и вся сумма

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}=$$

Очевидно, что кроме первого слагаемого равного единице получилась геометрическая прогрессия с первым членом равным 1, знаменателем равным ½ и количеством членов равным *n*. Для нахождения суммы геометрической прогрессии есть формула

$$S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$$

Поэтому

$$x_n<1+\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=1+2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<$$

В очередной раз отбросив вычитаемое ещё раз увеличим выражение

$$< 1 + 2 \cdot \left(1 \right) = 1 + 2 = 3$$

Оба условия теоремы доказаны, и поэтому число e существует. Попутно доказано, что оно заключено в промежутке от двух до трёх $2<e<3$.